Cuadernos de Economía. Vol. 21 189-212 1993

Estimación de sistemas de ecuaciones simultáneas con datos de panel: Una aplicación a la demanda de energía.

Joaquín Alegre Martín
Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, 690
08034 - Barcelona

En la literatura econométrica más reciente se ha producido un fuerte impulso de las estimaciones basadas en datos de panel, en parte como consecuencia de la mayor disponibilidad de programas informáticos que consideran este tipo de análisis. Sin embargo, la mayoría de aplicaciones se desarrollan en el ámbito uniecuacional. El propósito de este artículo es exponer brevemente los procedimientos más básicos de estimación de sistemas de ecuaciones simultáneas con datos de panel, ofreciendo una aplicación en el ámbito de la demanda de energía.

El término de datos de panel hace referencia a la agrupación de observaciones sobre un corte transversal de individuos (familias, empresas) a lo largo de varios períodos de tiempo. El empleo de datos de panel en el trabajo aplicado supone varias ventajas. La primera es la de poder disponer de un número mayor de observaciones, mejorando la eficiencia de las estimaciones. En segundo lugar, permite controlar en la estimación los efectos individuales y temporales no observables. La disponibilidad de técnicas econométricas para este tipo de datos hace posible, además, la estimación de modelos microeconómicos a partir de encuestas de corte transversal, evitando el análisis del comportamiento individual en base a series temporales agregadas. Las especificaciones dinámicas son de especial interés en la modelización de datos de panel; no obstante, éstas no se van a considerar en este trabajo. En Baltagi y Raj (1992) el lector interesado puede encontrar un completo resumen sobre los desarrollos más recientes en la econometría de datos de panel.

Baltagi (1981) ha extendido la literatura sobre la estimación de datos panel en el caso uniecuacional —los estudios, entre otros, de Balestra y Nerlove (1966), Wallace y Hussain (1969), Amemiya (1971), Maddala (1971), Nerlove (1971), Swamy y Arora (1972) y Fuller y Battese (1974)— al modelo de ecuaciones simultáneas. Previamente, Avery (1977) y Baltagi (1980) han estudiado el modelo de componentes del error en el caso de un sistema de ecuaciones aparentemente no relacionadas (SEANR). Prucha (1984) demuestra la equivalencia asintótica de varios de los estimadores por mínimos cuadrados generalizados (MCG) del modelo SEANR. En Hsiao (1986) se resumen algunas de las propuestas de estimación del modelo de ecuaciones simultáneas, tanto en su forma estructural como en su forma reducida, bajo el supuesto de que no hay restricciones en la matriz de varianzas y covarianzas y se cumple la condición de rango para la identificación.

Magnus (1982) y Magnus y Woodland (1988) analizan la estimación máximo verosímil de un modelo SEARN, lineal o no lineal, bajo distintos supuestos sobre los errores. En Sickles (1985) puede encontrarse un ejemplo de tal estimación máximo verosímil. Prucha (1985), bajo el supuesto de normalidad, deriva el estimador máximo verosímil con información completa (MVIC) para los parámetros de la regresión y las covarianzas de un modelo lineal de ecuaciones simultáneas, con componentes en el error. Prucha (1985) generaliza el resultado de Hausman (1974, 1975) para el modelo clásico de ecuaciones simultáneas, demostrando que el estimador MVIC tiene una representación como estimador de variables instrumentales. Estos estimadores pueden concebirse como aproximaciones numéricas al MVIC. Revankar (1992) prueba la equivalencia exacta de varios estimadores por variables instrumentales en un sistema general de ecuaciones simultáneas.

I. - SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS, CON TÉRMINO DE PERTURBACIÓN COMPUESTO.

El modelo de ecuaciones simultáneas con componentes del error en su forma estructural puede expresarse de la siguiente manera:

$$y_{it} = \mu + \Gamma y_{it} + Bx_{it}$$
$$i = 1, \dots, N$$
$$t = 1, \dots, T$$

donde Γ y B son matrices de coeficientes de orden GxG y GxK, respectivamente, siendo los elementos de la diagonal de Γ iguales a cero; y_{it} es el vector de Gx1 variables endógenas; x_{it} es el vector Kx1 de variables exógenas; μ es el vector Gx1 de términos independientes; u_{it} de orden Gx1 es el vector de perturbaciones, que en este modelo se define como:

$$u_{it} = \alpha_i + \tau_t + v_{it}$$

siendo α_i, τ_t, v_{it} vectores aleatorios de orden Gx1, con media cero e independientes entre sí, y:

$$E\,[x_{it}\, v_{js}] = 0,$$

$$E\,[\alpha_i, \alpha'_j] = \begin{cases} \Sigma_\alpha = (\sigma^2_{\alpha,g1}), & \text{si } i=j \\ 0, & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

$$E\,[\tau_t, \tau'_s] = \begin{cases} \Sigma_\tau = (\sigma^2_{\tau,g1}), & \text{si } t=s \\ 0, & \text{si } t\neq s \end{cases}$$

$$E\,[v_{it}, v'_{js}] = \begin{cases} \Sigma_v = (\sigma^2_{v,g1}), & \text{si } i=j \text{ y } t=s \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La matriz de varianzas y covarianzas del modelo de ecuaciones simultáneas, para dos de las ecuaciones del sistema (Σ_{j1}) puede escribirse como:

$$\Sigma_{j1} = \sigma^2_{\alpha j1}\, A + \sigma^2_{\tau j1}\, B + \sigma^2_{vj1}\, I_{NT}$$

donde $A = I_N \otimes e_r\, e_r'$ y $B = e_N\, e_N' \otimes I_r$, siendo I matrices identidad y e vectores unitarios, del orden indicado en el subíndice; el signo $\otimes$ indica el producto de Kroenecker. Σ_{j1} puede reescribirse (véase Nerlove, 1971) como:

$$\Sigma_{j1} = \sigma^2_{3j1}\, \frac{J_{NT}}{NT} + \sigma^2_{1j1}\left(\frac{A}{T} - \frac{J_{NT}}{NT}\right) + \sigma^2_{2j1}\left(\frac{B}{N} - \frac{J_{NT}}{NT}\right) + \sigma^2_{vj1}\, Q$$

donde

$$Q = I_{NT} - \frac{A}{T} - \frac{B}{N} + \frac{J_{NT}}{NT}, \quad J_{NT} = e_{NT}\, e'_{nt}$$

y

$$\sigma^2_{3j1} = \sigma^2_{vj1} + N\,\sigma^2_{\tau j1} + T\,\sigma^2_{\mu j1},$$

$$\sigma^2_{1j1} = \sigma^2_{vj1} + T\,\sigma^2_{\alpha j1},$$

$$\sigma^2_{2j1} = \sigma^2_{vj1} + N\,\sigma^2_{\tau j1},$$

los valores $\sigma^2{}_3$, $\sigma^2{}_1$, $\sigma^2{}_2$, $\sigma^2{}_v$, son las distintas raíces características de Σ_{j1} de multiplicidad 1, N-1, T-1, y (N-1) (T-1), respectivamente. Los vectores característicos asociados a los anteriores valores son, en el mismo orden, $e_{NT}/\sqrt{NT}$, Q1', Q2' y Q3', que cumplen:

$$Q'1Q1 = \frac{A}{T} - \frac{J}{NT},$$

$$Q'2Q2 = \frac{B}{N} - \frac{J}{NT},$$

$$Q'3Q3 = Q,$$

II. - ESTIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS EN DOS Y TRES ETAPAS EN EL MODELO DE COMPONENTES DEL ERROR.

Baltagi (1981), fue quien extendió los métodos de mínimos cuadrados en dos etapas (MC2E) y los mínimos cuadrados en tres etapas (MC3E) al modelo con componentes en el error (ECMC2E, ECMC3E).

Tomemos la ecuación g del sistema: $y_g = Z_g\, \delta_g + u_g$, donde $Z_g = [X_g\; Y_g]$ y $\delta = [\gamma, \beta]$, Z_g es una matriz con K_g variables exógenas y M_g endógenas (y bajo el supuesto de que se cumple la condición de rango). Multiplicando la ecuación por la matriz de transformación Q_h' para h=1,2,3, según se han definido anteriormente, el sistema puede reescribirse:

$$Q'_h\, y_g = Q'_h\, Y_g\, \gamma_g + Q'_h\, X_g\, \beta_g + Q'_h\, u_g = Q'_h\, Z_g\, \delta_g + Q'_h\, u_g\,,$$

$$y_g{}^{(h)} = Z_g{}^{(h)}\, \delta_g + u_g{}^{(h)}\,,\ h=1,2,3$$

cumpliéndose:

$$E(u_g{}^{(h)}\, u_g{}^{(h^*)\prime}) = \begin{cases} \sigma^{2(h)}{}_{gg}\, I_{n(h)} & ,\ \text{si } h=h^* \\ 0 & ,\ \text{si } h \neq h^* \end{cases}$$

siendo $\sigma^{2(1)} = \sigma^2{}_1$, $\sigma^{2(2)} = \sigma^2{}_2$, $\sigma^{2(3)} = \sigma^2{}_v$ y $n(1) = N-1$, $n(2) = T-1$, $n(3) = (N-1)\,(T-1)$.

Las perturbaciones transformadas, por tanto, son ortogonales, con matriz de varianzas y covarianzas proporcional a la matriz identidad. Si se tiene además en cuenta, que el vector de parámetros δ_g aparece en las ecuaciones correspondientes a las tres variables transformadas, se puede emplear $Q^{(h)'} X = X^{(h)}$, como matriz de variables instrumentales y aplicar el estimador de Aitken al siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} X^{(1)'} y_g^{(1)} \\ X^{(2)'} y_g^{(2)} \\ X^{(3)'} y_g^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^{(1)'} Z_g^{(1)} \\ X^{(2)'} Z_g^{(2)} \\ X^{(3)'} Z_g^{(3)} \end{bmatrix} \delta_g + \begin{bmatrix} X^{(1)'} u_g^{(1)} \\ X^{(2)'} u_g^{(2)} \\ X^{(3)'} u_g^{(3)} \end{bmatrix}$$

La estimación de δ_g en el anterior sistema será más eficiente que la estimación aislada en cada una de las ecuaciones. El estimador resultante es:

$$\hat{\delta}_{g,MCG} = \left(\sum_{h=1}^{3} \left[\frac{1}{\sigma^{2(h)}} Z_g^{(h)'} P_X^{(h)} Z_g^{(h)}\right]\right)^{-1} \left(\sum_{h=1}^{3} \left[\frac{1}{\sigma^{2(h)}} Z_g^{(h)'} P_X^{(h)} y_g^{(h)}\right]\right)$$

donde $P_X^{(h)} = X^{(h)} [X^{(h)'} X^{(h)}]^{-1} X^{(h)'}$. Los valores de $\sigma^{2(h)}$ pueden estimarse empleando los residuos obtenidos a partir de las estimaciones por MC2E de cada una de las ecuaciones:

$$\hat{\sigma}^{2(h)} = \frac{1}{n\,(h)} \quad (y_g^{(h)} - Z_g^{(h)'} \delta_{g,MC2E}^{(h)})' (y_g^{(h)} - Z_g^{(h)'} \delta_{g,MC2E}^{(h)}),$$

El anterior estimador se conoce como el estimador MC2E con componentes en el error (ECMC2E), (Baltagi, 1981). Como en el caso de la estimación univariante (véase Maddala, 1971) la expresión del estimador puede interpretarse como la combinación ponderada de los estimadores por MC2E, que recogen la variación entre los grupos, períodos de tiempo y residual.

La estimación del sistema ecuación a ecuación ignora las restricciones que puedan darse entre las mismas, así como las correlaciones entre los términos de perturbación de las distintas ecuaciones. Como en el caso en el que la estimación del sistema se realiza en un modelo con términos de perturbación no compuestos, una posible mejora en la eficiencia de la estimación, puede obtenerse si ésta se realiza simultáneamente en todas las ecuaciones. Baltagi (1981) deduce el equivalente al estimador MC3E para el caso de perturbaciones compuestas (ECMC3E). El sistema de G ecuaciones se nota:

$$y = Z\,\delta + u \quad \text{, siendo}$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Z_G \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_G \end{bmatrix}, u \sim (0,\Sigma)$$

De la misma manera que en la estimación ECMC2E se puede utilizar la descomposición de Σ en sus componentes para realizar una estimación más eficiente. La matriz Σ se puede descomponer:

$$\Sigma = \Sigma_3 \otimes \left(\frac{J_{NT}}{NT}\right) + \Sigma_1 \otimes Q'_1Q_1 + \Sigma_2 \otimes Q'_2Q_2 + \Sigma_3 \otimes Q'_3Q_3$$

Las matrices Σ_h son todas ellas de orden GxG con elementos $\sigma^2_{(h)jl}$. Premultiplicando las ecuaciones del sistema por $I_G \otimes Q_{(h)}$, para h=1,2,3, se obtiene:

$$y^{(h)} = Z^{(h)}\,\delta + u^{(h)} \quad ,$$

$$\text{con } E\,[\,u^{(h)}\,u^{(h)'}\,] = \Sigma^{(h)} \otimes I_{n(h)} \quad .$$

Baltagi (1981) señala que un estimador de δ puede obtenerse estimando por MC3E cada uno de los sistemas obtenidos para los distintos valores de h=1,2,3. Dado que entre las variables explicativas aparecen variables endógenas, el estimador de δ se obtendría aplicando MCG al modelo premultiplicado por $(I_g \otimes X^{(h)})'$. Una estimación más eficiente de los parámetros se obtiene estimando simultáneamente los tres sistemas (h=1,2,3):

$$\begin{bmatrix} (I_G \otimes X^{(1)'})\,y^{(1)} \\ (I_G \otimes X^{(2)'})\,y^{(2)} \\ (I_G \otimes X^{(3)'})\,y^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_G \otimes X^{(1)'})\,Z^{(1)} \\ (I_G \otimes X^{(2)'})\,Z^{(2)} \\ (I_G \otimes X^{(3)'})\,Z^{(3)} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} (I_G \otimes X^{(1)'})\,u^{(1)} \\ (I_G \otimes X^{(2)'})\,u^{(2)} \\ (I_G \otimes X^{(3)'})\,u^{(3)} \end{bmatrix}$$

El estimador MCG, denominado por Baltagi (1981) MCG del sistema (MCGS) es:

$$\hat{\delta}_{MCGS} = \Big(\sum_{h=1}^{3}\; [Z^{(h)'}\,[(\Sigma^{(h)})^{-1} \otimes P_{X^{(h)}}]\; Z^{(h)}]\,\Big)^{-1}$$

$$\left(\sum_{h=1}^{3} [Z^{(h)'} [(\Sigma^{(h)})^{-1} \otimes P_X^{(h)}]\, y^{(h)}]\right)$$

Los valores de $\Sigma^{(h)}$ pueden estimarse desde los residuos de la estimación previa por MC2E de cada sistema aisladamente, obteniéndose el denominado estimador por MC3E con componentes en el error (ECMC3E).[1]

El estimador ECMC3E de δ puede expresarse como combinación de las estimaciones de δ que se obtienen aisladamente en cada sistema (h=1,2,3). La expresión de δ_{ECMC3E} como combinación ponderada de los estimadores que recogen la variación entre los grupos, períodos de tiempo y residual (estimador de covarianza) es la siguiente:

$$\hat{\delta}_{ECMC3E} = \hat{a}_1\, \hat{\delta}^{(1)}_{MC3E} + \hat{a}_2\, \hat{\delta}^{(2)}_{MC3E} + \hat{a}_3\, \hat{\delta}^{(3)}_{MC3E}$$

donde

$$\hat{a}_h = \hat{H}^{-1} [Z^{(h)'} [(\hat{\Sigma}^{(h)})^{-1} \otimes P_X^{(h)}]\, Z^{(h)}] \quad , h=1,2,3.$$

$$\hat{H} = \sum_{h=1}^{3} [Z^{(h)'} [(\hat{\Sigma}^{(h)})^{-1} \otimes P_X^{(h)}]\, Z^{(h)}] \quad ,$$

El procedimiento de estimación propuesto por Baltagi (1981) consiste por lo tanto en:

(i) Transformar el sistema de ecuaciones mediante las matrices de vectores propios Q_1, Q_2, Q_3.

(ii) Estimar aisladamente las ecuaciones de cada sistema empleando MC2E.

(iii) Obtener los residuos de la estimación para construir un estimador de $\sigma^{2(h)}_{j1}$ mediante:

$$\sigma^{(h)2}_{j1} = \frac{(y_j^{(h)} - Z_j^{(h)}\, \delta_{j,MC2E})'\ (y_1^{(h)} - Z_1^{(h)}\, \delta_{j,MC2E})}{n(h)}$$

1. Baltagi (1981) señala cuáles son las condiciones en las que el anterior estimador ECMC3E es equivalente al estimador ECMC2E. Si Σ es diagonal en bloques, ambos estimadores son idénticos, resultado equivalente al que ocurre en el modelo clásico de ecuaciones simultáneas. Sin embargo, no sucede lo mismo cuando cada ecuación estructural está exactamente identificada, lo que le aleja del caso clásico.

(iv) Una vez estimados los jl elementos de $\Sigma^{(h)}$ se aplica el estimador de δ sobre los tres sistemas de ecuaciones:

$$\hat{\delta}_{ECMC3E} = \left(\sum_{h=1}^{3} [Z^{(h)'} [(\hat{\Sigma}^{(h)})^{-1} \otimes P_X^{(h)}] Z^{(h)}] \right)^{-1}$$

$$\left(\sum_{h=1}^{3} [Z^{(h)'} [(\hat{\Sigma}^{(h)})^{-1} \otimes P_X^{(h)}] y^{(h)}] \right)$$

Baltagi (1981) demuestra que el estimador es consistente, y que los tres estimadores de δ, para h=1,2,3 proporcionan estimadores de la matriz de covarianzas menor que la de MC3E, en una matriz semidefinida positiva.

Prucha (1985) obtiene los estimadores máximo verosímiles del sistema de ecuaciones simultáneas; bajo el supuesto de que u es $N(0,\Sigma)$, resuelve el sistema de ecuaciones normales (véanse las ecuaciones 9.a-9.e, en Prucha para la expresión detallada del sistema). Los estimadores máximo verosímiles de μ (término independiente), δ ,Σ_α, Σ_τ, Σ_v cumplen, entre otras, las siguientes igualdades:

(1) $$\hat{\delta} = [\hat{Z}' \ \Sigma^{-1} Z]^{-1} [\hat{Z}' \ \Sigma^{-1} y] ;$$

(2) $$\hat{\mu} = [I_g \otimes \frac{e'_{NT}}{NT}] [y - Z \ \hat{\delta}] ;$$

(3) $$\hat{\Sigma}^{-1} = \hat{\Sigma}_1^{-1} \otimes \left(\frac{A}{T} - \frac{J_{NT}}{NT}\right) + \hat{\Sigma}_2^{-1} \otimes \left(\frac{B}{N} - \frac{J_{NT}}{NT}\right) + \hat{\Sigma}_v^{-1} \otimes Q ;$$

(4) $$\hat{\Sigma}_\alpha = \frac{\hat{\Sigma}_1 - \hat{\Sigma}_v}{T} \quad , \quad \hat{\Sigma}_\tau = \frac{\hat{\Sigma}_2 - \hat{\Sigma}_v}{N} \quad .$$

donde Z supra ^ indica la predicción en Z de las variables endógenas, a partir de la expresión de la forma reducida.

La estimación máximo verosímil resuelve el sistema de ecuaciones normales en forma iterativa. Prucha define la clase de estimadores que aproximan la estimación máximo verosímil de información completa, a partir de expresar δ en términos de cualquier estimador de la forma reducida de los parámetros y de los componentes de covarianza.

$$\hat{\delta} = [\sum_{h=1}^{3} \hat{Z}'_h\ (\hat{\Sigma}_h^{-1} \otimes Q_h)\ Z]^{-1}\ [\sum_{h=1}^{3} \hat{Z}'_h\ (\hat{\Sigma}_h^{-1} \otimes Q_h)\ y]\quad \text{, con } \Sigma_3 = \Sigma_v$$

Todos los estimadores de δ con la forma anterior pueden interpretarse como estimadores de variables instrumentales, siendo la matriz de instrumentos:

$$\hat{P} = \sum_{h=1}^{3} (\hat{\Sigma}_h^{-1} \otimes Q_h) \hat{Z}_h$$

El estimador ECMC3E de Baltagi (1981) pertenece a esta clase de estimadores que aproximan la estimación MVIC. Prucha (1985) demuestra asimismo que el estimador con variables ficticias del sistema es un estimador consistente.

III. - ECUACIONES APARENTEMENTE NO RELACIONADAS.

La estimación del modelo de ecuaciones simultáneas en el caso de ecuaciones aparentemente no relacionadas (SEANR) simplifica el proceso de estimación, aunque debe mantenerse la consideración especial sobre la estructura del término de perturbación. Al contrario del caso ordinario, el estimador MCG no es igual al estimador uniecuacional cuando cada ecuación tiene el mismo número de variables explicativas.

Avery (1977) y Baltagi (1980), presentan el estimador específico de en el caso SEANR con una estructura del término de perturbación compuesto. Magnus (1982) y Magnus y Woodland (1988) analizan la estimación máximo verosímil del modelo SEANR, lineal o no lineal, bajo distintos supuestos sobre los errores. Prucha (1984) demuestra la equivalencia asintótica de varios de los estimadores MCG del SEANR.

Dado que todas las variables explicativas del sistema son exógenas (Z = X), es posible aplicar la estimación de MCG a todo el sistema utilizando la expresión habitual:

$$\hat{\delta}_{MCG} = [X'\Sigma^{-1} X]^{-1} \quad [X'\Sigma^{-1} y]\ ,$$

sustituyendo la expresión de Σ por la descomposición basada en sus valores y vectores propios. O bien, directamente, sustituyendo la expresión de Σ^{-1}. La inversa de esta matriz, dado que J_{NT}/NT, $\{(A/T) - (J_{NT}/NT)\}$, $\{(B/N) - (J_{NT}/NT)\}$ y Q son matrices simétricas, idempotentes y con suma igual a la matriz identidad I_{NT}, es igual (Baltagi, 1980) a:

$$\Sigma^{-1} = \Sigma_3^{-1} \otimes \frac{J_{NT}}{NT} + \Sigma_1^{-1} \otimes (\frac{A}{T} - \frac{J_{NT}}{NT}) + \Sigma_2^{-1} \otimes (\frac{B}{N} - \frac{J_{NT}}{NT}) + \Sigma_v^{-1} \otimes Q\ ,$$

Bajo el supuesto simplificador (aunque no restrictivo) de que las variables están medidas en desviaciones, el estimador MCG (ECMCG) del sistema puede escribirse:

$$\hat{\delta}_{MCGS} = [X' (\Sigma_1^{-1} \otimes (\frac{A}{T} - \frac{J_{NT}}{NT}) X + X' (\Sigma_2^{-1} \otimes (\frac{B}{N} - \frac{J_{NT}}{NT}) X + X' (\Sigma_v^{-1} \otimes Q) X]$$

$$[X' (\Sigma_1^{-1} \otimes (\frac{A}{T} - \frac{J_{NT}}{NT}) y + X' (\Sigma_2^{-1} \otimes (\frac{B}{N} - \frac{J_{NT}}{NT}) y + X' (\Sigma_v^{-1} \otimes Q) X]$$

Para calcular los diferentes estimadores de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_v$ Baltagi (1980) a partir de los trabajos de Wallace y Hussain (1969) y Amemiya (1971) propone los siguientes, que cumplen la propiedad de ser asintóticamente insesgados y consistentes:

$$S_v = \frac{1}{(N-1)(T-1)} u'Qu \quad ,$$

$$S_1 = \frac{1}{N-1} u' [\frac{A}{T} - \frac{J_{NT}}{NT}]u \quad ,$$

$$S_1 = \frac{1}{T-1} u' [\frac{B}{N} - \frac{J_{NT}}{NT}]u \quad ,$$

siendo u= (u_i u_2, ... u_G), una matriz de orden NTxG de las perturbaciones. Dado que el valor de dicha matriz es desconocido, es preciso estimarlos; la consistencia del estimador queda garantizada, por ejemplo, si los residuos se obtienen de la estimación de δ:

$$\hat{\delta}_{j,cv} = [X'_j QX_j]^{-1} [X'_j Qy_j]$$

es decir, el estimador que se obtiene de aplicar m.c.o en cada ecuación, pero incluyendo como variables explicativas variables ficticias, que recojan la pertenencia de la observación a un grupo y momento del tiempo específico.

En Avery (1977) el procedimiento de estimación es el mismo, con la diferencia de que su notación y algoritmos de cálculo se aproximan más a las expresiones clásicas de la solución univariante de Amemiya (1971) y Wallace y Hussain (1969). Avery (1977) propone como estimador de los residuos en la última etapa, los que se obtienen de aplicar m.c.o en cada ecuación, sin incluir, sin embargo, variables ficticias. Prucha (1984) demuestra que ambos estimadores son asintóticamente eficientes.

Magnus (1982) y Magnus y Woodland (1988) analizan la estimación máximo verosímil del modelo SEARN. No se trata con detalle esta alternativa, aunque debe señalarse que es la opción formalmente más correcta, aunque su coste es excesivo en términos de implementación. Magnus (1982) considera un modelo que puede ser lineal o no lineal en los parámetros, con dos componentes del error: $u_{it} = \tau_t + v_{it}$. Define la función de verosimilitud del sistema y las condiciones bajo las que puede considerarse la función de verosimilitud concentrada, respecto a las matrices de covarianza. Las condiciones de máxima verosimilitud conducen a una expresión explícita para maximizar la función en dos etapas: Se puede minimizar una parte de la función, respecto a los parámetros de la regresión, condicionada a los valores de las matrices de varianzas del error. Condicionado a los valores de los parámetros, se obtienen estimadores máximo verosímiles de las matrices de varianzas. El problema de este procedimiento es que no garantiza, como también ocurría en el procedimiento anterior ECMC3E, que la matriz de varianzas del componente temporal sea semidefinida positiva. La propuesta de Magnus es el empleo de procesos iterativos en los que se impone esta condición en las matrices de covarianzas del error. Facilita, además, la incorporación adicional de las restricciones no lineales necesarias en los modelos de producción o consumo.

IV. - ESTIMACIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE DEMANDA.

4.1. Definición del modelo.

El objetivo de la modelización es obtener estimaciones de las elasticidades de sustitución entre inputs energéticos, para la industria española. Para ello se ha empleado la información disponible en la Encuesta Industrial del INE; se han considerado los 81 sectores manufactureros (excluyendo los sectores de Energía y Agua) en el período 1978-1986. Los resultados aquí presentados forman parte de un trabajo más amplio, en el que se han estimado tres formas funcionales distintas (translog, Generalizada de Leontief y Minflex-Laurent) contrastando en todas ellas, tanto las condiciones de estabilidad temporal, como las restricciones impuestas por la teoría. Sólo una parte reducida de los resultados correspondientes a la especificación translog se reproducen aquí.

Manteniendo como hipótesis la separabilidad débil y homotética entre inputs, las características de las sustituciones entre energías pueden analizarse —si se cumplen determinadas condiciones de regularidad en la estructura de producción[2]— a partir de una función de costes unitarios. Para una forma funcional translog, la anterior función se define, para los cinco inputs energéticos considerados, como:

$$\ln c_E = \alpha_0 + \sum_i \beta_i \ln p_{E_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \beta_{ij} \ln p_{E_i} \ln p_{E_i} \quad i=1, \ldots, 5$$

donde i=1, …, 5 se refiere a las cinco categorías siguientes: electricidad, carbón, fuel, gasóleo/gasolina y gas natural y licuado. Se supone que los precios energéticos se determinan de manera exógena a los sectores industriales. Se considera también que la función cumple las siguientes condiciones: (i) función real definita positiva y finita; (ii) no decreciente; (iii) linealmente homogénea; (iv) cóncava.

El supuesto de minimización de costes implica (lema de Shephard) que las funciones de demanda de las energías individuales, en términos de las proporciones de gasto sobre el agregado energía, defina el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S_{E_i} = \beta_i + \sum_j \beta_{ij} \ln p_{E_j} \qquad , i,\ j = 1, \ldots, 5$$

Las hipótesis de la teoría de producción neoclásica y el requisito de que $\sum S_i = 1$, implican que los parámetros deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\sum \beta_i = 1$$

$$\sum_i \beta_{ij} = \sum_j \beta_{ij} = 0$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad i \neq j$$

Las restricciones de simetría reducen el número de parámetros libres del sistema a 15. El requisito de simetría supone imponer la estimación del modelo con restricciones entre las ecuaciones, por lo que el sistema debe estimarse simultáneamente. La restricción global de concavidad puede imponerse sobre los parámetros directamente a partir del procedimiento definido en Jorgenson y Laffon (1984) y Jorgenson (1986).

El término de perturbación, en cada una de las ecuaciones del sistema de proporciones de demanda, se define como un error compuesto. La incorporación de un efecto temporal, debe interpretarse como la influencia que medidas concretas de política

2. Véanse entre otros Shephard, 1953; Fuss, McFadden y Mundlak, 1978; Diewert, 1971, 1973, 1974; Blackorby et al., 1978

económica general tienen en las proporciones demandadas de inputs. El efecto individual recoge las diferentes estructuras tecnológicas de cada sector, pudiendo recoger también la influencia de políticas energéticas sectoriales.

El método de estimación emplea una modificación del procedimiento propuesto por Baltagi (1980; 1981), en los sistemas de ecuaciones de demanda de inputs. El sistema se estima por el método de covarianza (supuesto de efectos fijos) y por ECMCG (efectos aleatorios). La estimación por ECMCG se obtiene como combinación lineal de las estimaciones por MCG en los sistemas de variación temporal, sectorial y de covarianza (h=1, 2, 3). Esto representa estimar separadamente cada sistema. Para obtener los sistemas de ecuaciones basados en las transformaciones Q_1, Q_2 y Q_3 se ha empleado el lenguaje matricial de SAS/IML; dadas las características de estas matrices, en términos de la estimación final, una transformación equivalente, se basa en los productos $Q_1' Q_1$ $Q_2' Q_2$ y $Q_3' Q_3$; premultiplicar por estas matrices equivale a escribir los datos en desviaciones: de los valores medios de los sectores $\overline{x}_i - \overline{x}$, de cada año $\overline{x}_t - \overline{x}$ y residual $\overline{x}_{it} - \overline{x}_i - \overline{x}_t + \overline{x}$.

Para subsanar el problema de singularidad de la matriz de covarianzas, típico de estos sistemas de demanda, se sigue la propuesta usual de suprimir una ecuación (en nuestro caso la correspondiente al gas). Los resultados no dependen de la ecuación suprimida bajo determinadas condiciones (Molinas, 1984). Las estimaciones de cada sistema se realizan utilizando el método de estimación Zellner iterativo (ITSUR), mediante el procedimiento SYSNLIN del programa SAS. Tanto en los modelos lineales, como no lineales, el procedimiento supone minimizar una suma generalizada de cuadrados (que en los resultados aparece referenciada como 'Objetivo') definida como:

$$r' \, (s^{-1} \otimes w) \, r/n ,$$

donde r es el vector NTGx1 de residuos, para las G ecuaciones del sistema; S es la matriz GxG que estima la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones entre las ecuaciones; $W = (Z' \, Z)^{-1} Z'$ o $W = I_n$, es una matriz NTxNT compuesta por la matriz de proyección de las variables instrumentales o la matriz identidad y n es el número de observaciones (NT). Las desviaciones estándar de las estimaciones se obtienen de la diagonal de $C = (F' \, (S^{-1} \otimes W))^{-1}$, donde F es la matriz jacobiana, NTGxK, de derivadas parciales del error respecto a los parámetros.

Una vez obtenidas las matrices de covarianzas S_1, S_2, S_v, el estimador de MCG se obtiene como combinación lineal de las estimaciones. El estimador de covarianza se obtiene directamente en el tercer sistema.

4.2. Resultados de la estimación.

Los principales resultados de la estimación del sistema translog se comentan a continuación.[3] En el cuadro 1 se ofrecen las estimaciones obtenidas imponiendo las hipótesis de homogeneidad lineal y simetría de los modelos transformados, con Q_1, Q_2, Q_3, y la estimación ECMCG. Las estimaciones se realizan en desviaciones (carecen, por tanto de término independiente). Los contrastes realizados de homogeneidad lineal y simetría se presentan en el cuadro 2. Los cálculos de los contrastes para las estimaciones sectorial y temporal se presentan únicamente como un valor de referencia. Ninguna de las dos hipótesis se rechazan en el modelo de covarianza, al 1%; rechazándose al 5% la hipótesis de simetría.Esta también se rechaza en la estimación de ECMCG. La condición de concavidad restringe la matriz de elasticidades de sustitución a ser negativa semidefinida. En la estimación del modelo por ECMCG 158 sobre las 729 observaciones de la muestra cumplen la condición de concavidad local, verificándose en el valor medio de la muestra. En la estimación de covarianza son sólo 64 las observaciones en las que se cumple la concavidad local, cumpliéndose, sin embargo en el valor medio muestral. Jorgenson (1986) muestra que se puede imponer la concavidad global, representando la matriz de coeficientes del sistema, B_{KK} en términos de su factorización de Cholesky (B_{KK} = TDT', siendo T una matriz singular inferior y D una matriz diagonal. Véase también Lau, 1978). El contraste de concavidad se realiza estimando el modelo en su expresión factorizada de Cholesky, imponiendo homogeneidad y simetría, sin ninguna restricción adicional e imponiendo, posteriormente, la condición de no positividad en los elementos de D. Aunque el contraste de esta hipótesis no puede realizarse en la estimación ECMCG, en la estimación de covarianza[4] no se rechaza la hipótesis de concavidad de la función.

Una medida habitual de las relaciones entre inputs la proporciona la elasticidad de sustitución de Allen-Uzawa y la elasticidad precio. En el modelo translog, las primeras se definen

$$\sigma_{ij} = \frac{\beta_{ij} + S_i S_j}{S_i S_j} \quad , \quad i \neq j$$

3. Como un análisis previo a la estimación debe verificarse la permanencia estructural de los parámetros. El contraste de cambio estructural realizado se basa en el propuesto por Roy (1957) y Zellner (1962), no rechazándose la hipótesis de permanencia estructural.

4. Gallant y Jorgenson (1979) demuestran que el cambio en la función criterio puede emplearse como un contraste asintótico χ^2. El contraste estadístico se realiza como analogía al contraste de razón de verosimiltud. Se calcula en primer lugar el vector de parámetros que minimiza la función objetivo. A continuación se obtiene el valor de la función objetivo, condicionada a la matriz de covarianzas del sistema obtenida en la estimación sin restricciones. El contraste estadístico se obtiene mediante la diferencia entre el valor de la función objetivo restringida y la no restringida las expresiones desarrolladas por Anderson y Thursby, 1986).

$$\sigma_{ij} = \frac{\beta_{ij} + S_i\, S_j\,(S_i - 1)}{S_i^2}, \quad i \neq j$$

En los cuadros 3 a 7 se ofrecen las elasticidades de sustitución y precio, tanto de las estimaciones de covarianza como de ECMCG, así como de la estimación de covarianza imponiendo concavidad. Entre paréntesis se ofrecen las desviaciones estándar asintóticas (Klein, 1953), en primer lugar, y muestrales (según las expresiones desarrolladas por Anderson y Thursby, 1986).

4.3. Selección del método de estimación correcto.

El principal inconveniente del procedimiento de estimación es que puede producir matrices de varianzas de los efectos temporal y sectorial con elementos en la diagonal principal negativos (véase Baltagi, 1984). Sólo la estimación directa, bajo restricción, de estas matrices (como en Magnus, 1982) resuelve esta cuestión.

Las matrices estimadas presentan valores correctos en el caso del componente sectorial. No es así para el componente temporal, donde las varianzas de las cuatro ecuaciones son negativas, aunque con valores muy cercanos al cero. Se debería contrastar la hipótesis nula: $\Sigma_\tau = 0$. Magnus (1982) elabora un contraste de Wald para esta hipótesis nula en un modelo de ecuaciones simultáneas con un sólo componente en el error. La aplicación del contraste —extensible al modelo con dos efectos— no puede realizarse, puesto que es necesario que las varianzas sean positivas (hecho que su propuesta de estimación sí garantiza). Como una alternativa, se ha verificado la hipótesis $\sigma_\tau = 0$, ecuación a ecuación, empleando para ello el contraste de multiplicadores de Lagrange propuesto por Breusch y Pagan (1980).

El contraste de LM se define:

$$LM = \frac{NT}{2} \left\{ \frac{1}{T-1} \left[\frac{\hat{u}'(I_N \otimes e_T e'_T)\,\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}} - 1 \right]^2 + \frac{1}{N-1} \left[\frac{\hat{u}'(e_N e'_N \otimes I_T)\,\hat{u})}{\hat{u}'\hat{u}} - 1 \right]^2 \right\}$$

donde los residuos se obtienen de la estimación por MCO de cada una de las ecuaciones del sistema. El estadístico LM se comporta como una Xi^2 con 2 grados de libertad, bajo la H_0. Los valores de los contrastes[5], para cada una de las ecuaciones, son 3.1948, 2.6787, 4.1187, 0.1921; el valor en tablas para un nivel del 5% es de 5.991. No se rechaza, por tanto, la hipótesis nula.

5. Tanto estos contrates como los contrastes de Hausman, se llevan a cabo imponiendo en el modelo las hipótesis de homogeneidad lineal y simetría.

El contraste, se ha realizado adicionalmente sobre la varianza del efecto sectorial, proporcionando valores muy alejados del punto crítico. La correcta especificación del efecto sectorial depende ahora de si se considera este efecto como fijo o aleatorio.

La estimación de covarianza si los efectos individual o temporal están correlacionados con las variables explicativas, proporciona estimadores consistentes. Si los efectos no están correlacionados, el estimador ECMCG proporciona estimadores consistentes y eficientes. La selección entre ambos procedimientos de estimación puede realizarse por medio del contraste de Hausman-Kang (Hausman, 1978; Kang, 1985). Los cinco contrastes propuestos por Kang (véase Kang, 1985, pág. 200) apoyan la estimación de covarianza.

V. - CONCLUSIONES.

El artículo ha realizado una revisión de la estimación de un sistema de ecuaciones simultáneas de carácter estático. Los métodos de estimación de más fácil implementación informática combinan los procedimientos de MC2E y MC3E de los modelos clásicos, con las propuestas de estimación uniecuacional en modelo de error compuesto. Su aplicación en un sistema de ecuaciones derivado de una forma funcional translog —para caracterizar las relaciones de sustitución entre inputs energéticos— resuelve uno de los principales problemas de este tipo de estimaciones: la no consideración de la estructura tecnológica o el efecto de medidas de política energética.

La estimación indirecta de los parámetros, como en el modelo de regresión uniecuacional con componentes en el error, puede derivar en varianzas negativas de los efectos individual o temporal; aunque ello pueda ser síntoma de una errónea especificación de los efectos, la estimación bajo restricciones se presenta como la alternativa más adecuada.

Por otra parte, la imposición de las restricciones teóricas presenta también una cierta dificultad. Al definir el estimador de ECM3E o ECMCG como combinación de los estimadores basados en la variación sectorial, temporal y de covarianza, no siempre es posible obtener un estimador que garanatice, por ejemplo, la condición de concavidad de la función.

La ausencia de estimaciones de modelos dinámicos de ecuaciones simultáneas es una de los principales omisiones de la investigación actual. Es en la especificación dinámica en donde se obtienen las principales ventajas del empleo de los datos de panel. Aunque pueden aplicarse los procedimientos de Anderson y Hsiao (1981) para estimar por MC2E ecuación a ecuación, no existe una equivalencia directa entre los métodos aquí expuestos y los adecuados en una modelización dinámica.

Cuadro 1
Función Translog
(homogeneidad lineal y simetría).

Parám.	Sectorial	Temporal	Covarianza	ECMC3E
b11	0.170712	0.089663	0.037163	0.061481
	(1.72)	(1.70)	(3.75)	(7.08)
b12	-0.040748	-0.028516	-0.002066	-0.016650
	(-1.96)	(-2.45)	(0.47)	(-5.40)
b13	-0.334540	-0.043246	-0.040693	-0.040479
	(-3.78)	(-1.01)	(-4.37)	(-4.75)
b14	0.215192	-0.026460	-0.000093	-0.000279
	(3.70)	(-0.45)	(-0.01)	(-0.04)
b15	-	-	0.001556	-0.004074
			(0.39)	(-1.37)
b22	0.002089	0.009414	0.005865	-0.000352
	(0.12)	(2.61)	(1.48)	(-0.19)
b23	0.031302	0.020661	-0.008479	0.014547
	(0.98)	(2.34)	(-1.39)	(7.26)
b24	0.022678	-0.007843	-0.000406	0.002986
	(0.86)	(-0.53)	(-0.10)	(0.91)
b25	-	-	0.000953	-0.000531
			(0.374)	(-0.43)
b33	0.517739	-0.011321	0.038734	0.004958
	(4.43)	(-0.24)	(2.62)	(0.41)
b34	-0.271367	0.004531	0.015850	0.016675
	(-3.44)	(0.14)	(1.96)	(2.28)
b35	-	-	-0.005412	0.004298
			(-1.04)	(1.56)
b44	0.041548	0.093867	-0.020852	-0.020171
	(0.47)	(0.98)	(-2.51)	(-2.46)
b45	-	-	0.005501	0.000788
			(1.31)	(0.12)
b55	-	-	-0.002598	-0.000482
			(-0.79)	(-0.25)
SCE:				
Elec	2.42457	0.00310	1.05127	
Carb	0.10194	0.00012	0.49360	
Fuel	2.18996	0.00365	1.94684	
Gasol	0.81946	0.00091	0.82712	
R^2:				
Elec	0.0147	0.2095	0.0133	
Carb	0.1175	-	0.0045	
Fuel	0.1907	0.2931	0.0270	
Gasol	0.2333	0.3015	0.0041	
Traza de S:				
	0.07052	0.00119	0.00594	

Cuadro 2.
Contrastes de Homogeneidad lineal y simetría.

Homogeneidad Lineal			Simetría	
Modelo	R.V.	Wald	R.V.	Wald
Sectorial	10.23865	11.43418	8.23164	8.86619
Temporal	-	-	11.80228	33.51829
Covarianza	6.18489	6.24798	13.62791	14.95223

Cuadro 3.
Elasticidades de sustitución (Estimación de covarianza)

Electricidad	Carbón	Fuel	Gasóleo/gasolina	Gas
-0.65371	**1.30488**	**0.67883**	**0.99891**	**1.05712**
(0.0310)	(0.6542)	(0.0735)	(0.0828)	(0.1469)
(0.0348)	(0.9772)	(0.0750)	(0.0945)	(0.2069)
	-41.59878	**-2.15083**	**0.77525**	**2.64629**
	(27.541)	(2.2628)	(2.2322)	(4.4038)
		-2.68863	**1.46935**	**0.49970**
		(0.2934)	(0.2398)	(0.4805)
		(0.3541)	(0.2492)	(0.4867)
			-6.56140	**1.75759**
			(0.3669)	(0.5762)
			(0.5774)	(0.6007)
				-20.85135
				(1.4146)
				(3.2446)

Cuadro 4.
Elasticidades precio (Estimación de covarianza)

Electricidad	Carbón	Fuel	Gasóleo/gasolina	Gas
-0.36929	**0.01565**	**0.15225**	**0.15040**	**0.05098**
(0.0175)	(0.0078)	(0.0165)	(0.0125)	(0.0071)
(0.0251)	(0.0102)	(0.0172)	(0.0139)	(0.0095)
0.73716	**-0.49912**	**-0.48239**	**0.11673**	**0.12763**
(0.3695)	(0.3305)	(0.5075)	(0.3361)	(0.2124)
(0.4961)	(0.3381)	(0.5298)	(0.3414)	(0.2136)
0.38349	**-0.02581**	**-0.60302**	**0.22123**	**0.02410**
(0.0415)	(0.0271)	(0.0658)	(0.0361)	(0.0232)
(0.0448)	(0.0282)	(0.0725)	(0.0372)	(0.0243)
0.56431	**0.00930**	**0.32955**	**-0.98793**	**0.08477**
(0.0468)	(0.0268)	(0.0538)	(0.0552)	(0.0278)
(0.0555)	(0.0272)	(0.0556)	(0.0639)	(0.0283)
0.59719	**0.03175**	**0.11207**	**0.26463**	**-1.00565**
(0.0830)	(0.05284)	(0.1078)	(0.0867)	(0.0682)
(0.1177)	(0.05297)	(0.1134)	(0.0890)	(0.0854)

Cuadro 5.
Elasticidades de sustitución (Estimación de MCG).

Electricidad	Carbón	Fuel	Gasóleo/gasolina	Gas
-0.57751	**-1.45643**	**0.68052**	**0.99672**	**0.85047**
(0.0272)	(0.4545)	(0.0672)	(0.0795)	(0.1087)
(0.0305)	(0.9289)	(0.0688)	(0.0915)	(0.1599)
	-84.79000	**6.40584**	**2.65293**	**0.08238**
	(12.640)	(0.7444)	(1.8142)	(2.1231)
	(69.493)	(3.9450)	(2.0825)	(2.1239)
		-3.36007	**1.49380**	**1.39730**
		(0.2401)	(0.2164)	(0.2484)
		(0.3453)	(0.2271)	(0.3293)
			-6.53135	**1.10857**
			(0.3614))	(0.9302)
			(0.5724)	(0.9367)
				-19.94139
				(0.7994)
				(2.9057)

Cuadro 6.
Elasticidades precio (Estimación de MCG).

Electricidad	Carbón	Fuel	Gasóleo/gasolina	Gas
-0.32625	**-0.01747**	**0.15263**	**0.15007**	**0.04102**
(0.0154)	(0.0054)	(0.0151)	(0.0120)	(0.0052)
(0.0232)	(0.0087)	(0.0159)	(0.0135)	(0.0083)
-0.82277	**-1.01734**	**1.43673**	**0.39944**	**0.00397**
(0.2567)	(0.1516)	(0.1670)	(0.2732)	(0.1024)
(0.4223)	(0.2098)	(0.2966)	(0.2849)	(0.1032)
0.38444	**0.07686**	**-0.75361**	**0.22491**	**0.06739**
(0.0380)	(0.0089)	(0.0538)	(0.0326)	(0.0120)
(0.0415)	(0.0114)	(0.0640)	(0.0338)	(0.0140)
0.56307	**0.03183**	**0.33503**	**-0.98340**	**0.05346**
(0.0449)	(0.0218)	(0.0485)	(0.0544)	(0.0449)
(0.0539)	(0.0223)	(0.0506)	(0.0631)	(0.0451)
0.48045	**0.00099**	**0.31341**	**0.16691**	**-0.96176**
(0.0614)	(0.0255)	(0.0557)	(0.1401)	(0.0385)
(0.1020)	(0.0257)	(0.0675)	(0.1411)	(0.0625)

Cuadro 7.
Elasticidades de sustitución y precio
(Estimación de covarianza, imponiendo concavidad).

Electricidad	Carbón	Fuel	Gasóleo/gasolina	Gas
-0.82344	0.95105	1.40349	1.18509	0.87089
	-135.8335	3.50541	1.47235	1.75440
		-4.53200	1.99295	1.79574
			-7.70277	0.53173
				-20.64813
-0.46518	0.01141	0.23333	0.17843	0.04200
0.53727	-1.62978	0.78621	0.22169	0.08461
0.58772	0.04206	-101645	0.30007	0.08661
0.66948	0.01767	0.44699	-1.15978	0.02564
0.49198	0.02105	0.40276	0.08006	-0.99585

Bibliografía

AMEMIYA, T. (1971), "The estimation of variances in a variance-components model", *International Economic Review*, nº. 12, págs. 1-13.

ANDERSON, R.G. y CH. HSIAO (1981), "Estimation of dynamic models with error components", *Journal of the American Statistical Association*, nº. 76, págs. 598-606.

ANDERSON, R.G. y J.G. THURSBY (1986), "Confidence intervals for elasticity estimators in translog models", *The Review of Economics ans Statistics*, págs. 647-656.

AVERY, R.B. (1977), "Error components and seemingly unrelated regressions", *Econometrica*, nº. 34, págs. 585-612.

BALESTRA, P. y M. NERLOVE (1966), "Pooling cross-section and time series data in the estimation of a dynamic model: the demand for natural gas", *Econometrica*, nº. 34, págs. 585-612.

BALTAGI, B.H. (1980), "On seemingly unrelated regressions with error components", *Econometrica*, nº. 48, págs. 1547-1551.

BALTAGI, B.H. (1981) "Simultaneous equations with error components", *Journal of Econometrics*, nº. 17, págs. 189-200.

BALTAGI, B.H. (1984), "A Monte Carlo study for pooling time series of cross-section data in the simultaneous equations model", *International Economic Review*, vol. 25, nº. 3, págs. 03-624.

BALTAGI B.H. y B. RAJ (1992), "A survey of recent theoretical developments in the econometrics of panel data", *Empirical Economics*, nº. 17, págs. 85-109.

BLACKORBY, C., D. PRIMONT y R.R. RUSSELL et al. (1978), *Duality, separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam.

BREUSCH, T.S. y A.R. PAGAN (1980), "The Lagrange Multiplier test and its applications to model specification in Econometrics", *Review of Economic Studies*, XLVII, págs. 239-253.

DIEWERT, W.E. (1971), "An application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function", *Journal of Political Economy*, nº. 79 (3), págs. 481-507.

DIEWERT, W.E. (1973), "Functional forms and transformation functions", *Journal of Economic Theory*, nº. 6, págs. 284-316.

DIEWERT, W.E. (1974), "Functional forms for revenue and factor requirements functions", *International Economic Review*, nº. 165, págs. 119-130.

FULLER, W.A. y G.E. BATTESE (1974), "Estimation of Linear models with crossed-error structure", *Journal of Econometrics*, nº. 2, págs. 67-78.

FUSS, M., D. McFADDEN y Y. MUNDLAK (1978), "A survey of functional forms in the economic analysis of production", en M. Fuss y D. McFadden, eds. (1978), *Production Economics: A dual approach to theory and applications*, vol. I, North-Holland, Amsterdam.

GALLANT, A.R. y D.W. JORGENSON (1979), "Statistical inference for a system of simultaneous, nonlinear, implicit equations in the context of instrumental variable estimation", *Journal of Econometrics*, nº. 11, 2/3, págs. 275-302.

HAUSMAN, J.A. (1974), "Full information instrumental variables estimation of simultaneous equation models", *Annals of Economic and Social Measurement*, nº. 3, págs. 641-652.

HAUSMAN, J .A. (1975), "An instrumental variable approach to full information estimators for linear and certain nonlinear econometric models", *Econometrica*, nº. 43, págs. 727-738.

HAUSMAN, J .A. (1978), "Specification tests in Econometrics", *Econometrica*, nº 46, págs . 1251-1271 .

HSIAO, CH. (1986), *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press, Cambrige.

JORGENSON, D.W. (1986), "Econometric methods for modeling producer behaviour", en Z. Griliches y M.D. Intriligator, eds. (1986), *Handbook of Econometrics*, vol. III, North-Holland, Amsterdam.

JORGENSON, D.W. y J.J. LAFFONT (1984), "Efficient estimation of non-linear simultaneous equations with additive disturbances", *Annals of Social and Economic Measurement*, nº. 3, págs. 615-640.

KANG, S. (1985), "A note on the equivalence of specification tests in the two-factor multivariate variance components model", *Journal of Econometrics*, nº. 28, págs. 193-203.

KLEIN, L.R. (1953), *A Textbook of Econometrics*, Evanston, Row, Peterson and co.

LAU, L.J. (1978), Testing and imposing monoticity, convexity and quasiconvexity constraints", en M. Fuss y D. McFadden, eds., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, vol. II, North-Holland, Amsterdam.

MADDALA, G.S. (1971), "The use of variance components models in pooling cross-section and time series data", *Econometrica*, nº. 39, págs. 341-358.

MAGNUS, J.R. (1982), "Multivariate error components analysis of linear and non-linear regression models by maximum likelihood", *Journal of Econometrics*, nº. 19, págs. 239-285.

MAGNUS, J.R. y A.D. WOOLAND (1988), "On the maximum likelihood estimation of multivariate regression models containing serially correlated error components", *International Economic Review*, nº. 29, págs. 707-725.

MOLINAS, C. (1984), "Invariant estimation in singular systems of equations", mimeo, 84-12, University of California.

NERLOVE, M. (1971), "Further evidence on the estimation of dynamic economic relations from a time series of cross sections", *Econometrica*, 39, págs. 359-382.

PRUCHA, I.R. (1984), "On the asymtotic efficiency of feasible Aitken estimators for seemingly unrelated regression models with error components", *Econometrica*, nº. 52, págs. 203-207.

PRUCHA, I.R. (1985), "Maximum likelihood and instrumental variable estimation in simultaneous equation systems with error components", *International Economic Review*, nº. 26, págs. 491-506.

ROY, R. (1957), *De L'Utilité: Contribution a la Theorie des Choix*, Hermann, Paris.

SICKLES, R.C. (1985), "A nonlinear multivariate error components analysis of technology and specific factor productivity growth with an application to the U.S. Airlines", *Journal of Econometrics* nº. 27, págs. 61-78.

SWAMY, P.A.V.B. y S.S. ARORA (1972), "The exact finite sample properties of the estimators of coefficients in the error components regression models", *Econometrica*, nº. 40, págs. 261-275.

WALLACE, T.D. y A. HUSSAIN (1969), "The use of error components models in combining cross-section with time series data", *Econometrica*, nº. 37, págs. 55-72.

ZELLNER, A. (1962), "An efficient method of estimating seemingly unrelated regression and tests for aggregation bias", *Journal of the American Statistical Association*, nº. 57, págs. 348-368.